

Les Filtres analogiques
-------------------------

**I. Introduction :**

Le filtrage est une forme de traitement de signal, obtenu en envoyant le signal à travers un ensemble de circuits électroniques pour :

- ❖ Modifier son spectre de fréquence, ou modifier sa phase et donc sa forme ;
- ❖ Extraire une partie de l'information liée à ce signal ;
- ❖ Éliminer ou affaiblir des fréquences parasites indésirables ;
- ❖ Isoler dans un signal complexe la ou les bandes de fréquence utiles.

Le filtrage s'applique à des signaux représentés sous forme analogique (filtres analogiques), ou sous forme numérique après échantillonnage du signal (filtres numériques).

Parmi les filtres analogiques qui existent, il y a les filtres passifs et les filtres actifs.

**II. Analyse de Fourier :****1°) Théorème de Fourier**

On montre que toute fonction périodique  $s(t)$ , de période  $T$ , de pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ , peut s'écrire comme une somme de fonctions sinusoidales :

$s(t) = s(t+T) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$  Appelée série de Fourier ; où les coefficients de cette série sont donnés par :

$$s_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt \quad \text{et pour } n > 1, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et } b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$\text{et } \varphi_n = \text{Arctg} \left( -\frac{b_n}{a_n} \right); \quad s_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

**2°) Spectre de Fourier d'un signal périodique**◆ **Composante continue**

On constate que :  $s_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = \langle s(t) \rangle$  i.e. Le premier terme de la décomposition de Fourier correspond à la valeur moyenne (composante continue) du signal.

◆ **Fondamental**

Les deux termes en  $n = 1$  définissent ce qu'on appelle le **fondamental**, i.e. les sinusoides de pulsation égale à celle de  $s(t)$ .

◆ **Harmoniques :**

Les termes en  $n > 1$  définissent les différentes **harmoniques**.

◆ **Spectre :** On représente  $s_n$  en fonction de  $nf$ .

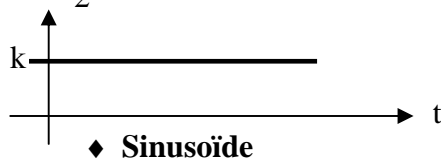
Remarque : on montre que, pour une fonction paire [impaire],  $\forall n, b_n = 0$  [ $a_n = 0$ ].

Aussi ; si  $s(t) = s\left(t + \frac{T}{2}\right)$  ; il y aura que des harmonique de rangs pairs.

si  $s(t) = -s\left(t + \frac{T}{2}\right)$  ; il y aura que des harmonique de rangs impairs.

◆ **Signal continu**

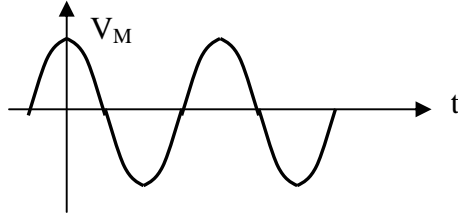
$$s(t) = k = \frac{a_0}{2} = s_0$$



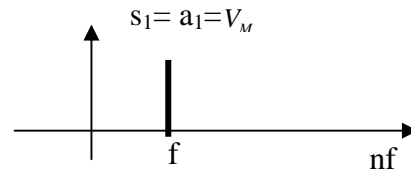
de spectre :



$$s(t) = V_M \cos(\omega t) = a_1 \cos(\omega t)$$

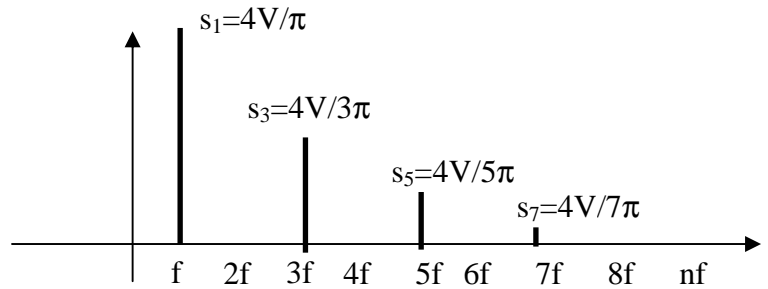
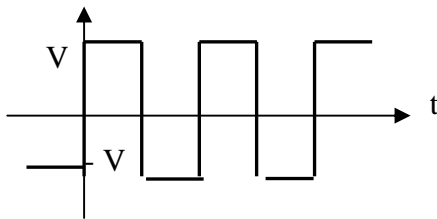


de spectre :



◆ **Signal rectangulaire**

$$s(t) = \pm V = \frac{4V}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\omega t) = \frac{4V}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin((2p+1)\omega t) \quad (*) \text{ de spectre :}$$

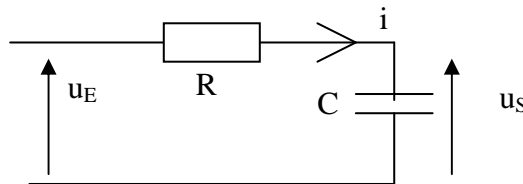


(\*) En effet :  $s(t)$  est une fonction impaire donc :  $a_n = 0$  ; en plus, on  $s(t) = -s\left(t + \frac{T}{2}\right)$  ;  $n$  est impair.

**III. Les filtres passifs linéaires :**

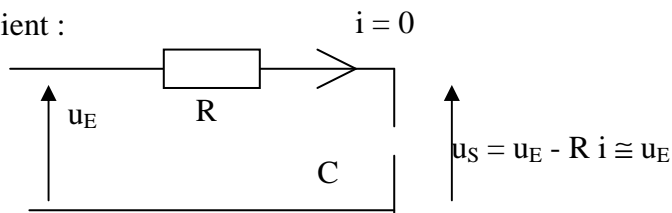
**1°) Filtre passe-bas d'ordre 1 :**

◆ **On considère le filtre (R, C) suivant :**

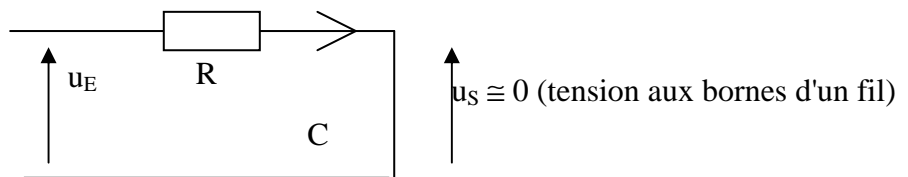


◆ **Approche qualitative (schéma équivalent pour  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow \infty$ )**

Si  $\omega \rightarrow 0$ , le filtre devient :



Si  $\omega \rightarrow \infty$ , le filtre devient :



On a donc affaire, a priori, à un filtre passe-bas.

◆ **Fonction de transfert**

Par application du pont diviseur de tension :  $\underline{U}_s = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{U}_E$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_E} = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad \text{On pose : } \Omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_E} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\Omega_0}} \quad \text{Fonction de transfert d'ordre 1.}$$

$$\text{Gain du filtre : } H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{U_s}{U_E} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{dB}(\omega) = 20 \log[H(\omega)] = 20 \log|\underline{H}(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2}} = -10 \log \left( 1 + \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2 \right) \\ \varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = -\arg\left(1 + j\frac{\omega}{\Omega_0}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right) \end{array} \right.$$

✓ Basses fréquences :  $\omega \rightarrow 0, \underline{H}(j\omega) \cong 1, G_{dB} \cong 20 \log 1 = 0 \quad \varphi \cong 0$

✓ Hautes fréquences :  $\omega \rightarrow \infty,$

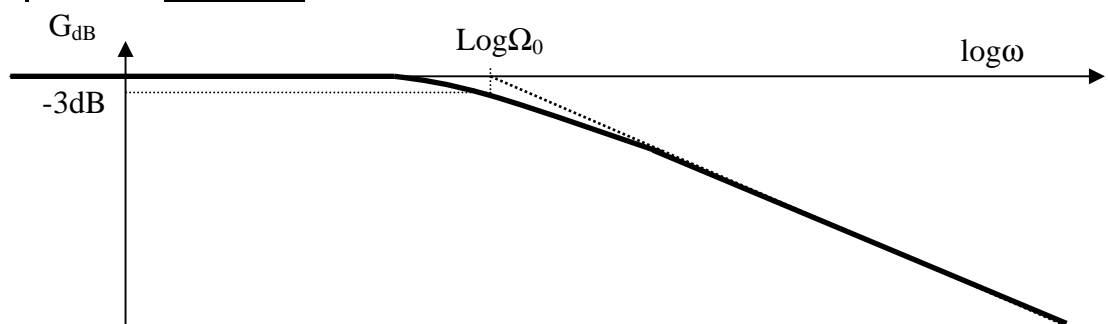
$$\underline{H}(j\omega) \cong \frac{1}{j\frac{\omega}{\Omega_0}}, G_{dB} \cong -20 \log\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right) = -20 \log \omega + 20 \log \Omega_0 \quad \varphi \cong -\frac{\pi}{2}$$

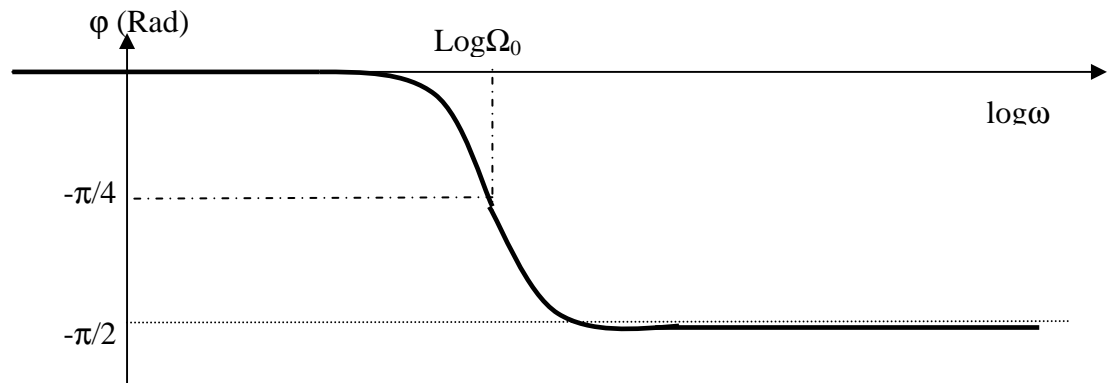
La droite  $-20W + 20 \log \Omega_0$  (où  $W = \log \omega$ ) est asymptote à hautes fréquences (droite de pente - 20 dB par décade, passant par 0 lorsque  $\omega = \Omega_0$ ).

✓  $\omega = \Omega_0, \underline{H}(j\Omega_0) = \frac{1}{1 + j}; G_{dB} = -20 \log \sqrt{2} = -3 \text{ dB} \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}$

$\omega = \Omega_0$  est donc la pulsation de coupure du filtre (R, C).

◆ **Diagramme de Bode**



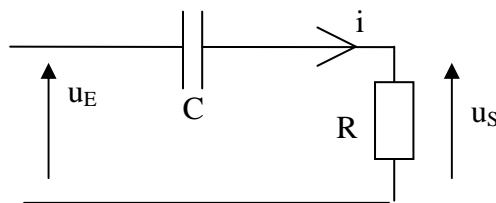


Comme la pulsation  $\omega$  varie de 0 à  $+\infty$ ,  $\log \omega$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Il est donc normal qu'une partie du diagramme de Bode soit dans les abscisses négatives.

**Remarque:** Le filtre passe-bas ne transmet que des signaux de fréquence inférieure à  $f_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi}$ .

### 2°) Filtre passe-haut d'ordre 1

◆ On considère le filtre (C, R) suivant :



#### ◆ Fonction de transfert

On reconnaît un pont diviseur :  $\underline{H}(j\omega) = \frac{U_S}{U_E} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$

On pose :  $\Omega_0 = \frac{1}{RC} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\Omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\Omega_0}} = \frac{1}{1 + \frac{\Omega_0}{j\omega}} = \frac{1}{1 - j\frac{\Omega_0}{\omega}}$  Fonction de transfert

d'ordre 1. Gain du filtre :  $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{U_S}{U_E} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_0}{\omega}\right)^2}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{dB}(\omega) = 20 \log[H(\omega)] = 20 \log|\underline{H}(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Omega_0^2}{\omega^2}}} = -10 \log\left(1 + \frac{\Omega_0^2}{\omega^2}\right) \\ \varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = -\arg\left(1 - j\frac{\Omega_0}{\omega}\right) = \arctan \frac{\Omega_0}{\omega} \end{array} \right.$$

✓ Basses fréquences :  $\omega \rightarrow 0, \underline{H}(j\omega) \cong j\frac{\omega}{\Omega_0}$ ,

$$G_{dB} \cong 20 \log \frac{\omega}{\Omega_0} = 20 \log \omega - 20 \log \Omega_0 \quad \varphi \cong \frac{\pi}{2}$$

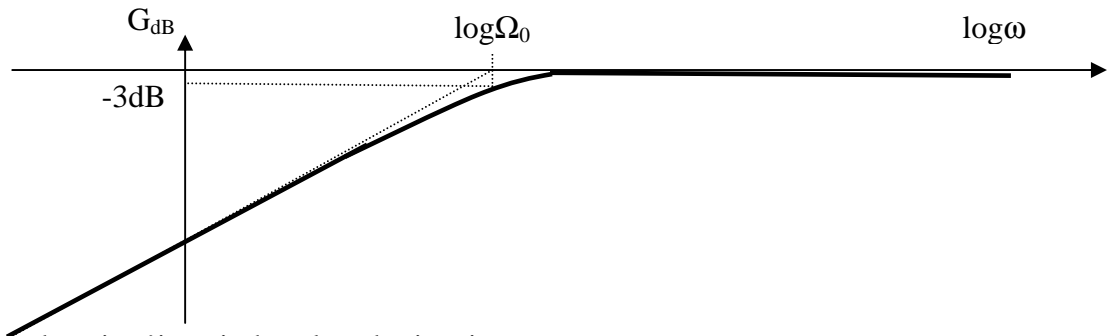
La droite  $20W - 20 \log \Omega_0$  (où  $W = \log \omega$ ) est asymptote à basses fréquences (droite de pente + 20 dB par décade, passant par 0 lorsque  $\omega = \Omega_0$ ).

✓ Hautes fréquences :  $\omega \rightarrow \infty, H(j\omega) \cong 1, G_{dB} \cong 20 \log 1 \cong 0 \quad \varphi \cong 0$

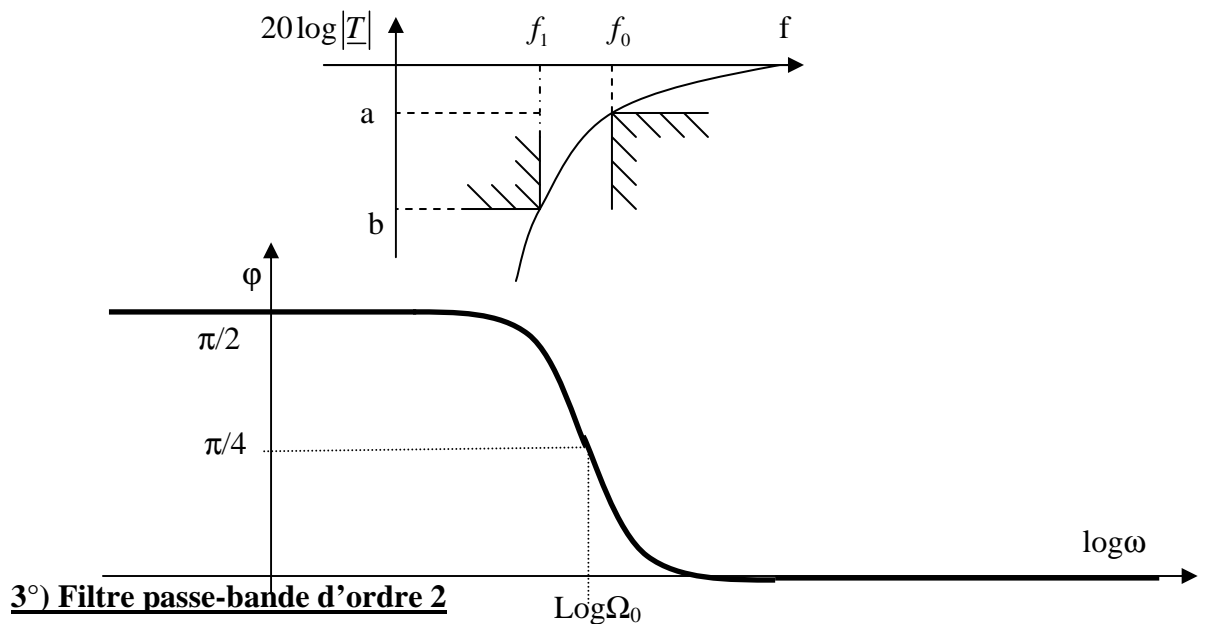
✓  $\omega = \Omega_0, H(j\Omega_0) = \frac{1}{1-j}; G_{dB} = -20 \log \sqrt{2} \cong -3 \text{ dB} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$

$\omega = \Omega_0$  est donc la pulsation de coupure du filtre (C,R).

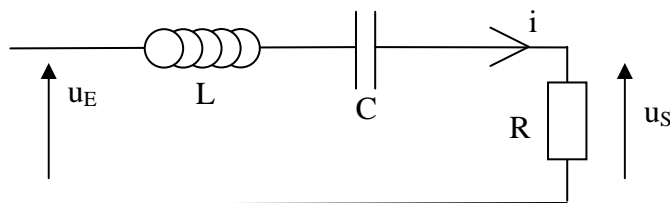
◆ **Diagramme de Bode**



Le diagramme de gain s'inscrit dans le gabarit suivant :

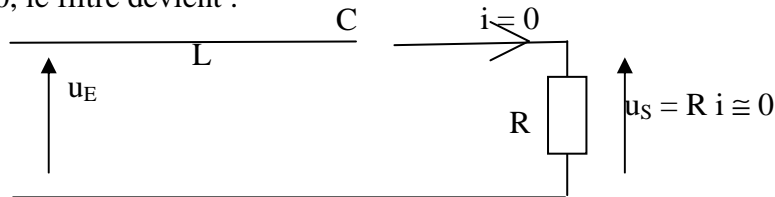


◆ **On considère le filtre (L, C, R) suivant :**

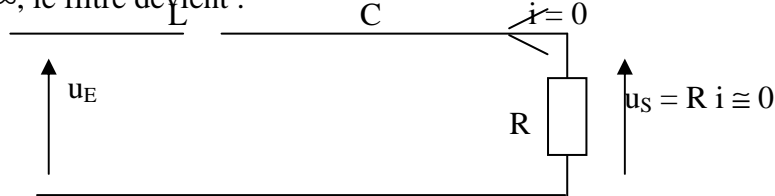


◆ **Approche qualitative**

Si  $\omega \rightarrow 0$ , le filtre devient :



Si  $\omega \rightarrow \infty$ , le filtre devient :



On a donc affaire, vraisemblablement, à un filtre passe-bande.

◆ **Fonction de transfert**

On reconnaît un pont diviseur : 
$$H(j\omega) = \frac{U_s}{U_E} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

$$\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ (pulsation propre); } x = \frac{\omega}{\Omega_0} \text{ (pulsation réduite); } X = \log x ;$$

On pose :

$$Q = \frac{1}{RC\Omega_0} = \frac{L\Omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ (facteur de qualité)}$$

$$\boxed{\frac{H(jx)}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{x}{x + jQ(x^2 - 1)}} \text{ Fonction de transfert d'ordre 2}$$

$$\text{Gain du filtre : } H(x) = \left| \frac{H(jx)}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \right| = \frac{U_s}{U_E} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} G_{dB}(x) &= 20 \log[H(x)] = 20 \log \left| \frac{H(jx)}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \right| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} = -10 \log \left( 1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \right) \\ \varphi(x) &= \arg(H(x)) = -\arg\left( 1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right) \right) = -\arctan \left[ Q\left(x - \frac{1}{x}\right) \right] \end{aligned} \right.$$

Les variations de  $G_{dB}(x)$  sont les mêmes que celles de  $H(x)$ , ce sont aussi l'inverse des

variations de  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ . Plutôt que de calculer  $\frac{dG_{dB}}{dx}$ , on calcule :

$$\frac{d}{dx} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2\left(x - \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

$$\boxed{G_{dB}(x) \uparrow \text{ si } x - \frac{1}{x} < 0 \text{ i.e. si } :x < 1. \quad G_{dB}(x) \downarrow \text{ si } x > 1.}$$

✓ Basses fréquences :  $\omega \rightarrow 0, x \rightarrow 0, \underline{H(jx)} \cong \frac{1}{-jQ} = \frac{jx}{Q}$ ,

$$G_{dB} \cong 20 \log \left[ \frac{x}{Q} \right] = 20 \log x - 20 \log Q \quad \varphi \cong \frac{\pi}{2}$$

La droite  $20 X - 20 \log Q$  (où  $X = \log x$ ) est asymptote à basses fréquences (droite de pente + 20 dB par décade, passant par  $-20 \log Q$  lorsque  $x = 1$ , càd lorsque  $\omega = \Omega_0$ ).

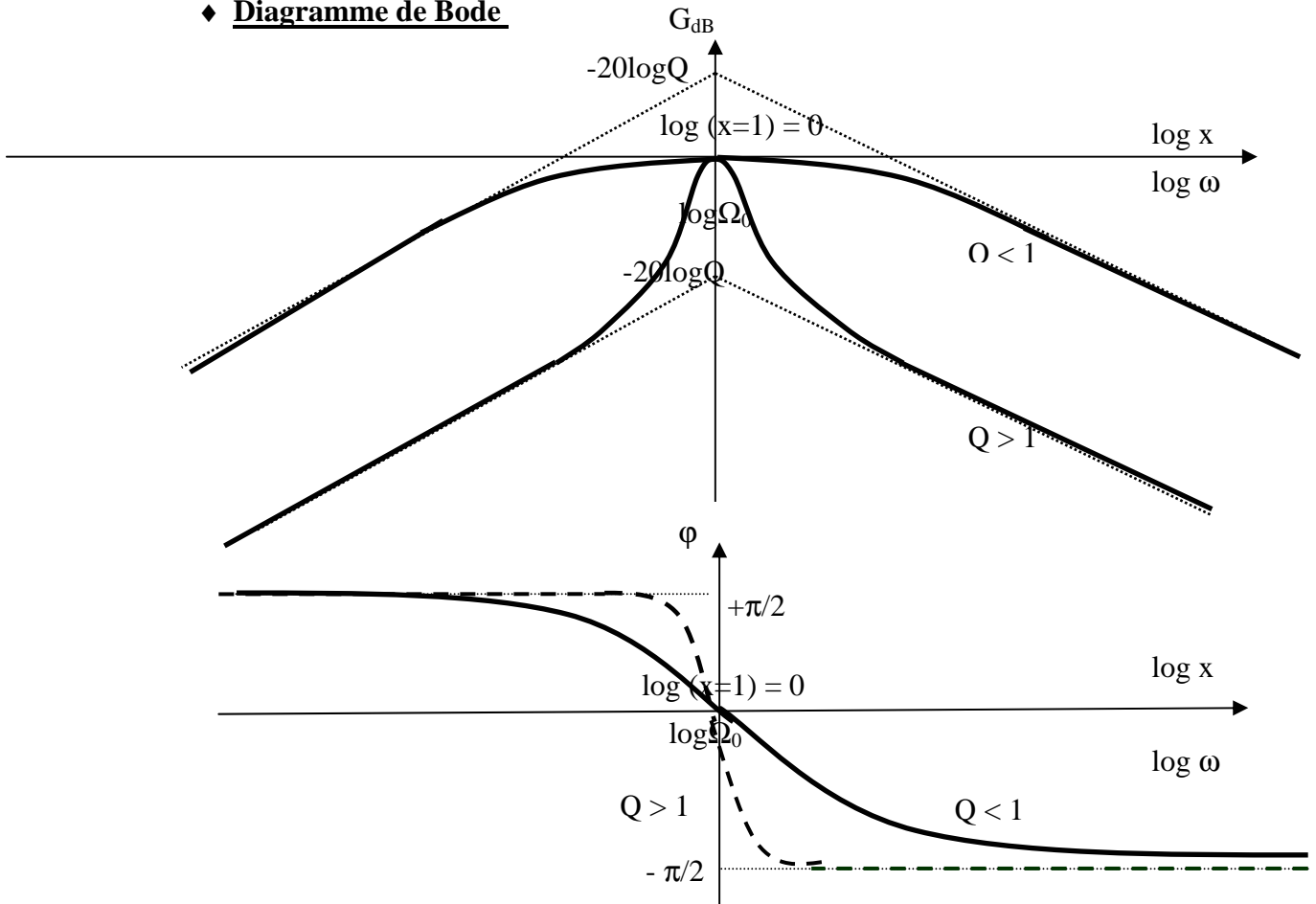
✓ Hautes fréquences :  $\omega \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty, \underline{H(jx)} \cong \frac{1}{jQx} = \frac{-j}{Qx}$ ,

$$G_{dB} \cong 20 \log \left[ \frac{1}{Qx} \right] = -20 \log x - 20 \log Q \quad \varphi \cong -\frac{\pi}{2}$$

La droite  $-20 X - 20 \log Q$  (où  $X = \log x$ ) est asymptote à hautes fréquences (droite de pente - 20 dB par décade, passant par  $-20 \log Q$  lorsque  $x = 1$ , càd lorsque  $\omega = \Omega_0$ ).

✓  $x = 1 : \underline{H} = 1, G_{dB} = 20 \log 1 = 0 \quad \varphi = 0$

◆ **Diagramme de Bode**



◆ **Pulsations de coupure**

On cherche les pulsations  $\omega_c$  tq:  $G_{dB}(\omega_c) = G_{dB} - 3 \text{ dB} = -3 \text{ dB}$  c' à d :  $H(x_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Il vient :  $1 + Q^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2 = 2; \quad Q^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2 = 1 \Rightarrow Q \left( x - \frac{1}{x} \right) = \pm 1 \Rightarrow x^2 \mp \frac{1}{Q} x - 1 = 0$

Dont les racines sont :  $x = \pm \frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$  Or seules les racines positives

conviennent ; donc :  $x_{2C} = \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$  et  $x_{1C} = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$

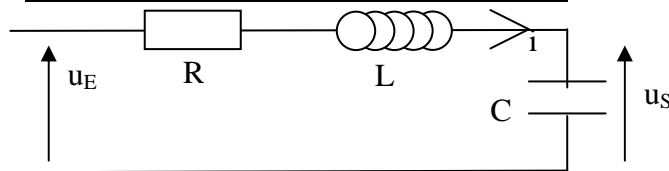
Les pulsations de coupure sont donc :  $\omega_{2C} = \Omega_0 x_{2C}$  et  $\omega_{1C} = \Omega_0 x_{1C}$ .

La largeur de la bande passante est :  $\omega_{2C} - \omega_{1C} = (x_{2C} - x_{1C})\Omega_0 = \frac{\Omega_0}{Q}$ .

(L, C, R) est un filtre passe-bande d'ordre 2, de pulsation propre :  $\Omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ , de bande passante :  $[\omega_{1C}; \omega_{2C}]$ , de largeur de bande passante  $L = \omega_{2C} - \omega_{1C} = \frac{\Omega_0}{Q}$ . Le filtre est donc d'autant plus sélectif (il sélectionne une bande de pulsations d'autant plus étroite) que Q est grand.

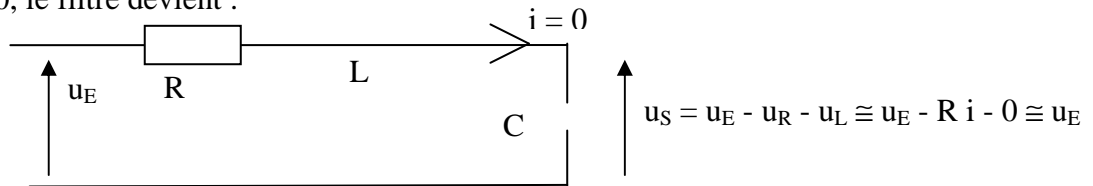
**4°) Filtre passe-bas d'ordre 2**

◆ **On considère le filtre (R, L, C) suivant :**

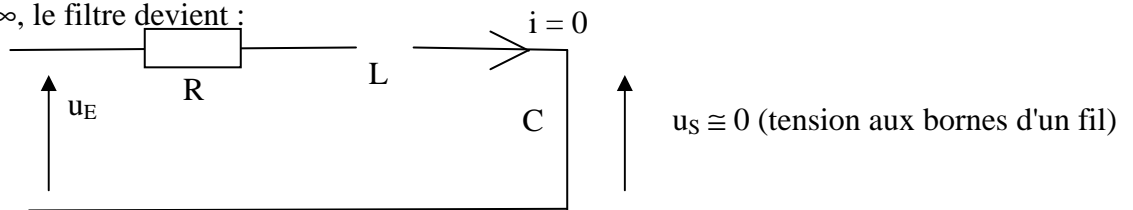


◆ **Approche qualitative**

Si  $\omega \rightarrow 0$ , le filtre devient :



Si  $\omega \rightarrow \infty$ , le filtre devient :



On a donc affaire, vraisemblablement, à un filtre passe-bas.

◆ **Fonction de transfert**

On reconnaît un pont diviseur :  $H(j\omega) = \frac{U_S(j\omega)}{U_E(j\omega)} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$

On pose:  $k=1, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ; et  $m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ .

Il vient que:  $H(j\omega) = \frac{k}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ .



Le module et l'argument de ce nombre complexe sont donnés par :

$$\|F(j\omega)\| = \frac{k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4m^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}; \arg[F(j\omega)] = -\arctan \frac{2m \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Calculons la dérivée du gain par rapport à  $\frac{\omega}{\omega_0}$  :

$$\frac{d[F(j\omega)]}{d\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} = -\frac{1}{2} \cdot k \left[ 4\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3 - 4\frac{\omega}{\omega_0}(1-2m^2) \right] \left[ \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4m^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}}$$

La dérivée s'annule pour les valeurs de  $\frac{\omega}{\omega_0}$  annulant  $4\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3 - 4\frac{\omega}{\omega_0}(1-2m^2)$ .

$$4\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3 - 4\frac{\omega}{\omega_0}(1-2m^2) = \frac{\omega}{\omega_0} \left[ 4\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 4(1-2m^2) \right]$$

On obtient donc: Une seule racine  $\frac{\omega}{\omega_0} = 0$  si  $m > 0,7$  ; Deux racines  $\frac{\omega}{\omega_0} = 0$  et

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1-2m^2} \text{ si } m \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$$

**Pulsation de résonance :** Pour  $m \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  alors  $\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1-2m^2} = \frac{\omega_R}{\omega_0}$  La réponse présente une

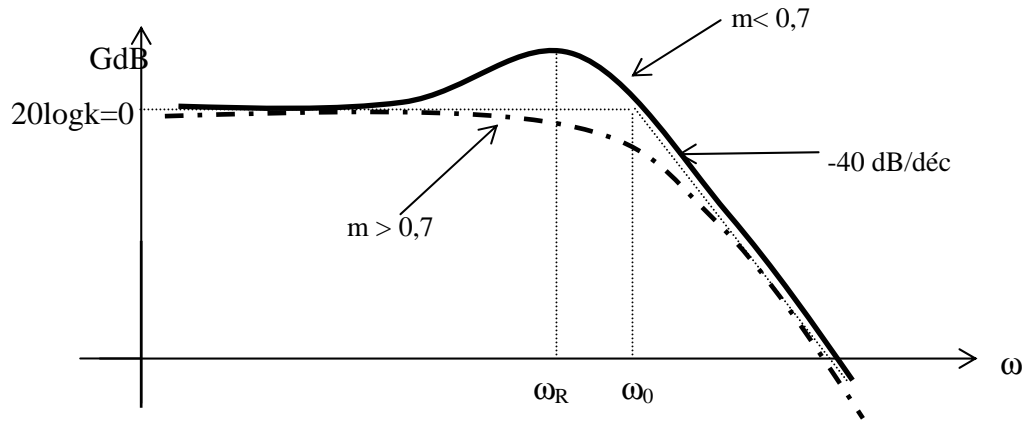
résonance pour la pulsation :  $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1-2m^2}$ .

✓ Basses fréquences :  $\omega \rightarrow 0$ ,  $H(j\omega) \cong k$ ,  $G_{dB} \cong 0$   $\varphi \cong 0$

✓ Hautes fréquences :  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $H(j\omega) \cong \frac{k}{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

$$G_{dB} \cong 20 \log k - 20 \log \left[ \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right] = 20 \log k - 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad \varphi \cong -\pi$$

$$\text{Pour } \omega = \omega_0, G_{dB} = 20 \log |F(j\omega)| = 20 \log \left( \frac{k}{2m \frac{\omega}{\omega_0}} \right); \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$



La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre, mais elle s'en approche de plus en plus lorsque m diminue.

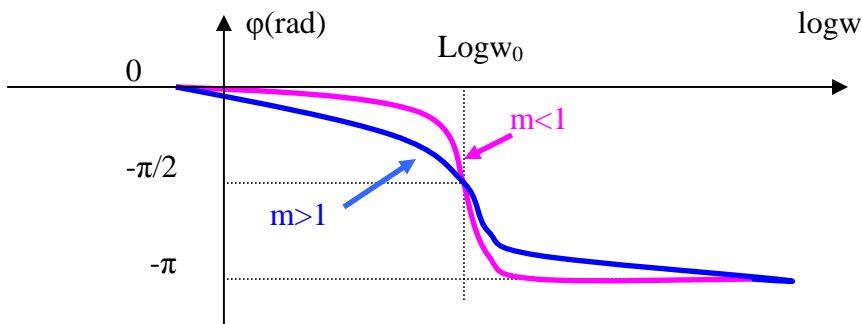
▪ **Facteur de résonance**

Pour  $m \leq 0,7$ , l'amplitude de la résonance est donné par :

$$\left|F(j\omega)\right|_{MAX} = \frac{k}{2 m \sqrt{1-m^2}} . \text{ On appelle facteur de résonance le rapport } M = \frac{\left|F(j\omega)\right|_{MAX}}{k} ,$$

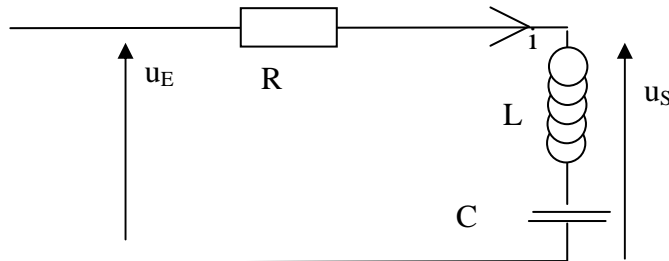
$$\text{soit : } M = \frac{1}{2 m \sqrt{1-m^2}} . \text{ Ou en dB : } M_{dB} = 20 \log \left|F(j\omega)\right|_{MAX} - 20 \log k .$$

Donc  $\forall m : \phi \rightarrow 0$  quand  $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow 0$  ;  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  quand  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$  et  $\phi = -\pi$  quand  $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow \infty$ . Plus m diminue, plus la variation de phase est brutale autour de  $\omega = \omega_0$ .



**5°) Filtre coupe-bande d'ordre 2 :**

♦ **On considère le filtre (R, L, C) suivant :**



♦ **Fonction de transfert**

On reconnaît un pont diviseur : 
$$H(j\omega) = \frac{U_S(j\omega)}{U_E(j\omega)} = \frac{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

$$\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ (pulsation propre); } x = \frac{\omega}{\Omega_0} \text{ (pulsation réduite); } X = \log x \text{ ;}$$

On pose :

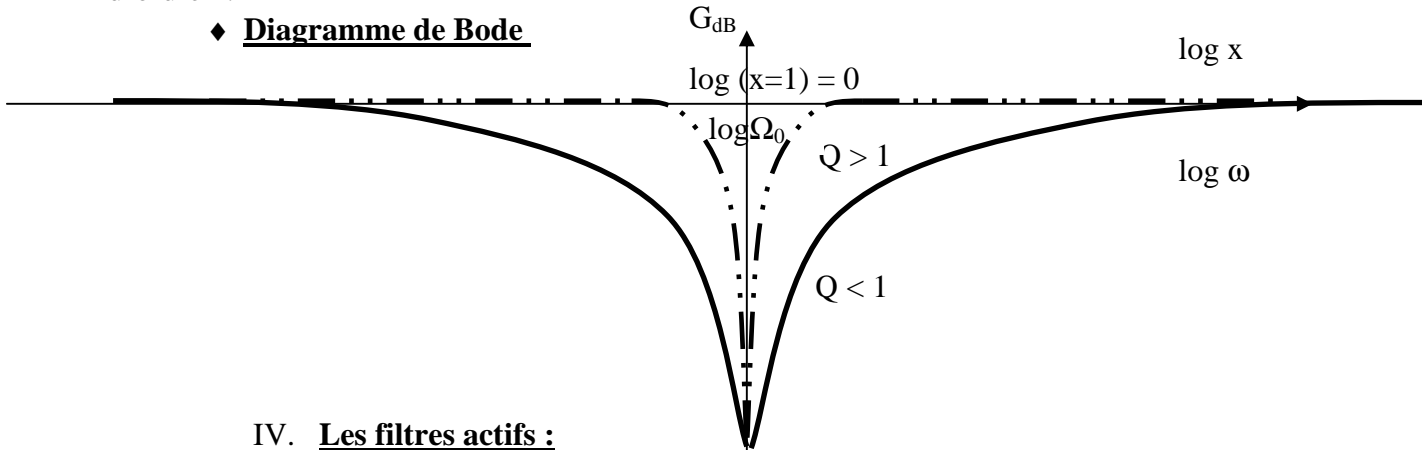
$$Q = \frac{1}{RC\Omega_0} = \frac{L\Omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ (facteur de qualité)}$$

$$\frac{H(jx)}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}{x + jQ(x^2 - 1)} = 1 - \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

Fonction de transfert

d'ordre 2.

◆ **Diagramme de Bode**



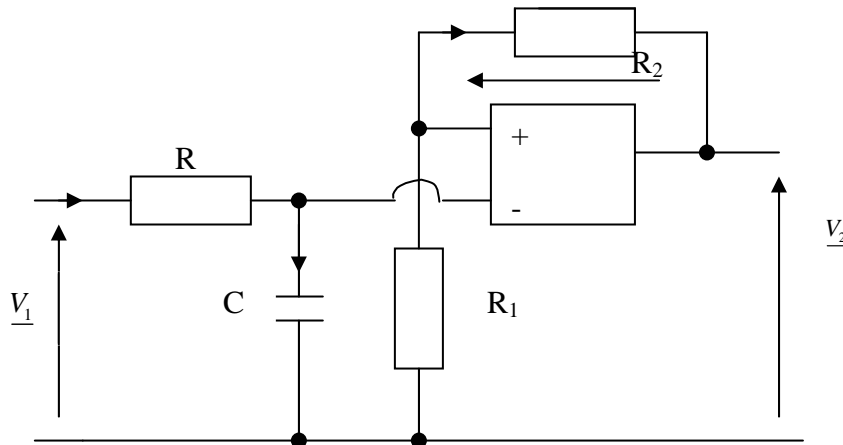
IV. **Les filtres actifs :**

1. **Cellules du premier ordre :**

1.1- **Passé bas :**

$$\text{On a : } V^+ = V^- \Rightarrow \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_2 = \frac{1}{1 + jRC\omega} V_1 \text{ d'où : } \underline{T} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$\text{De la forme: } \underline{H}(j\omega) = \frac{A}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}, \text{ avec } A = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \text{ et } \omega_c = \frac{1}{RC}.$$



$$G_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log \frac{A}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} = 20 \log A - 10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$$

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = -\arg\left(1 + j\frac{\omega}{w_c}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{w_c}\right).$$

✓ Basses fréquences :  $\omega \rightarrow 0$ ,  $H(j\omega) \cong A$ ,  $G_{dB} \cong 20\log A = 0$  ;  $\varphi \cong 0$ .

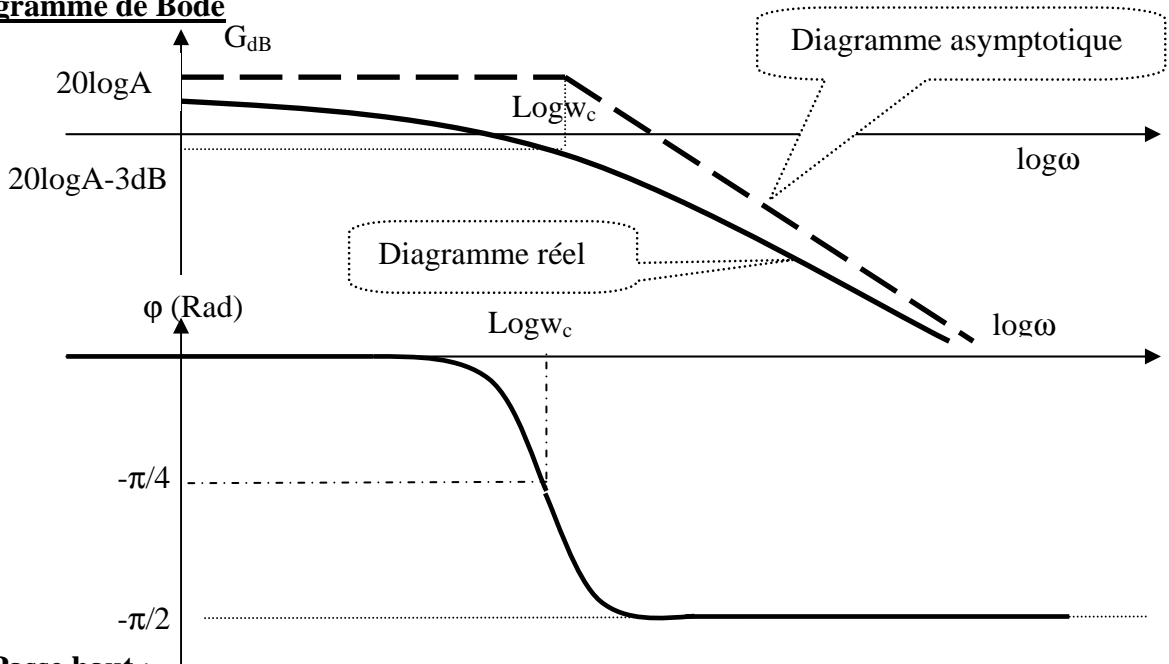
✓ Hautes fréquences :  $\omega \rightarrow \infty$ ,

$$\underline{H(j\omega)} \cong \frac{A}{j\frac{\omega}{w_c}}, G_{dB} \cong 20\log A - 20\log\left(\frac{\omega}{w_c}\right) = -20\log\omega + 20\log w_0 + 20\log A; \varphi \cong -\frac{\pi}{2}$$

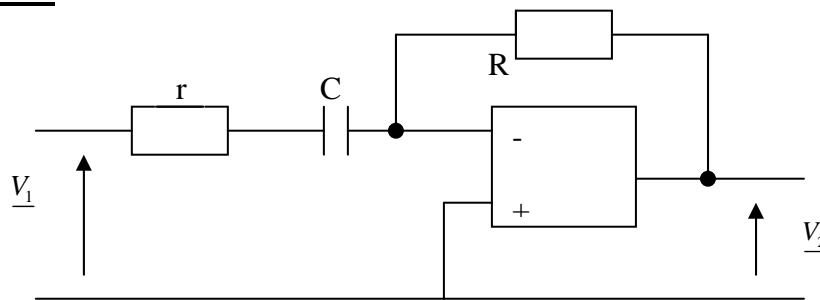
La droite  $-20 W + 20\log w_0 + 20\log A$  (où  $W = \log \omega$ ) est asymptote à hautes fréquences (droite de pente - 20 dB par décade, passant par 0 lorsque  $\omega = w_c$ ).

✓  $\omega = w_c$ ,  $\underline{H(j\Omega_0)} = \frac{A}{1+j}$ ;  $G_{dB} = 20\log A - 20\log\sqrt{2} = 20\log A - 3\text{ dB}$ ;  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

**Diagramme de Bode**



1.2- **Passé haut :**



$$\underline{T} = \frac{V_2}{V_1} = -\frac{R}{r} \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \text{ de la forme : } \underline{H(j\omega)} = A \times \frac{j\frac{\omega}{w_c}}{1 + j\frac{\omega}{w_c}}, \text{ avec } A = -\frac{R}{r} \text{ et } w_c = \frac{1}{RC}.$$

$$G_{dB}(\omega) = 20\log|H(j\omega)| = 20\log\frac{|A|}{\sqrt{1 + \frac{w_c^2}{\omega^2}}} = 20\log|A| - 10\log\left(1 + \frac{w_c^2}{\omega^2}\right)$$

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = -\pi - \arg\left(1 - j\frac{\omega_c}{\omega}\right) = -\pi - \arctan\left(-\frac{\omega_c}{\omega}\right)$$

✓ Basses fréquences :  $\omega \rightarrow 0, \underline{H(j\omega)} \cong jA\frac{\omega}{\omega_c}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$

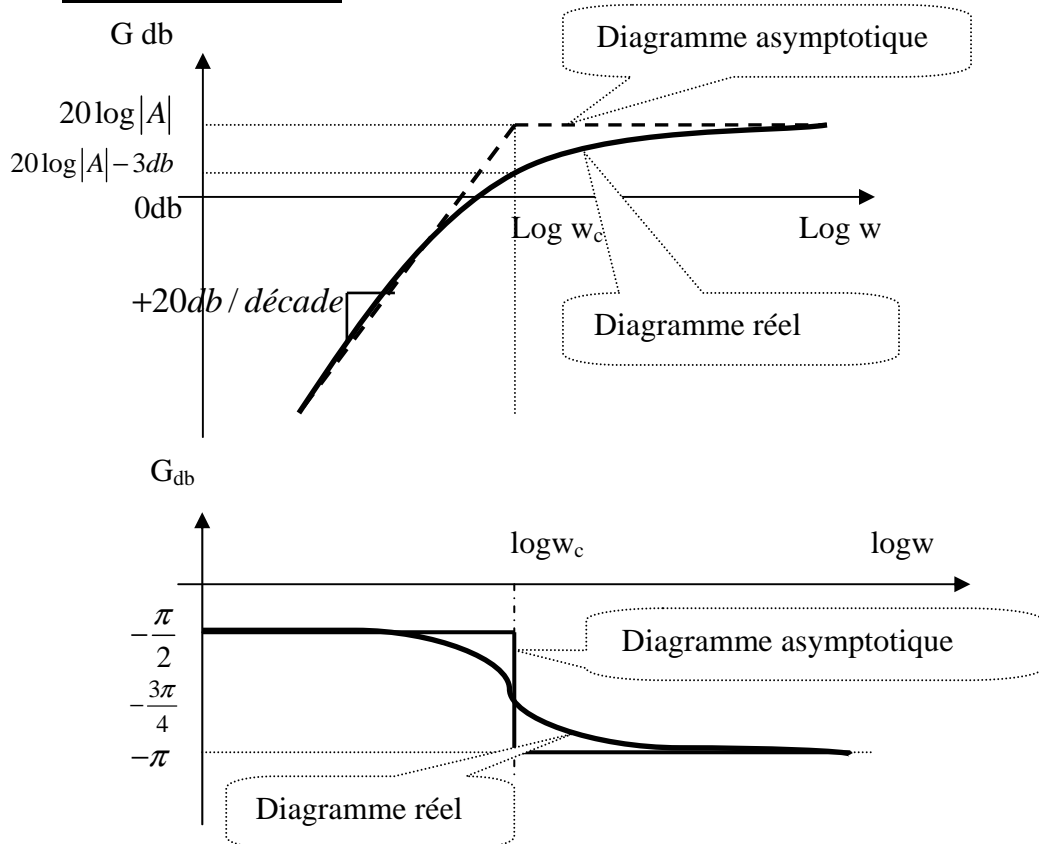
$$G_{dB} \cong 20\log|A| + 20\log\frac{\omega}{\omega_c} = 20\log|A| + 20\log\omega - 20\log\omega_c$$

La droite  $20W + 20\log|A| - 20\log\omega_c$  (où  $W = \log\omega$ ) est asymptote à basses fréquences (droite de pente + 20 dB par décade, passant par 0 lorsque  $\omega = \omega_c$ ).

✓ Hautes fréquences :  $\omega \rightarrow \infty, \underline{H(j\omega)} \cong A, G_{dB} \cong 20\log|A|; \varphi \cong \pi$ .

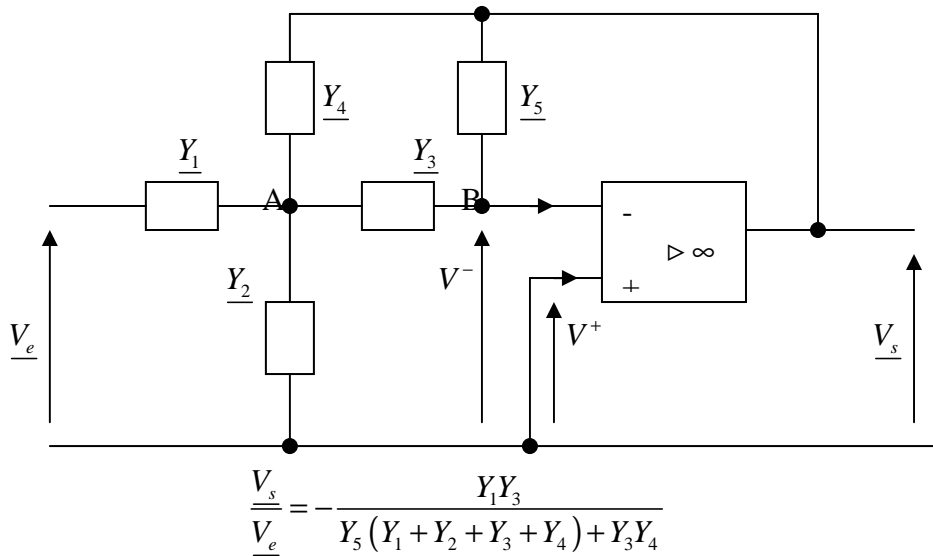
✓  $\omega = \omega_c, \underline{H(j\omega_c)} = \frac{A}{1-j}$  ;  $G_{dB} = 20\log|A| - 20\log\sqrt{2} \cong 20\log|A| - 3\text{ dB}$ ;  $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ .

◆ **Diagramme de Bode**



2. **Cellules du second ordre :**

2.1- **Structure de Rauch :**

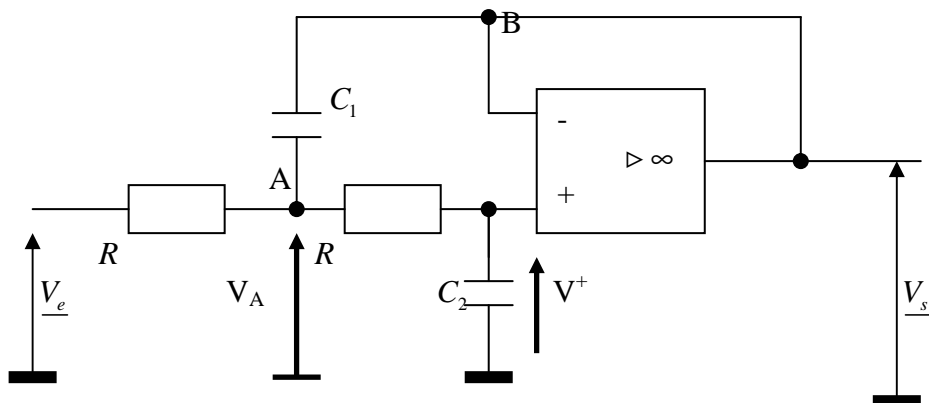


Filtre Passe-bas	Filtre Passe-haut	Filtre Passe-bande
$\frac{V_s}{V_e} = \frac{-1}{1 + j3RC_1\omega + C_1C_2(jR\omega)^2}$	$\frac{V_s}{V_e} = \frac{-R_1R_2(jC\omega)^2}{1 + j3R_2C\omega + R_1R_2(jC\omega)^2}$	$\frac{V_s}{V_e} = \frac{-jR_2R_3C\omega}{R_1 + R_2 + j2R_1R_2C\omega + R_1R_2R_3(jC\omega)^2}$
de le forme : $\frac{V_s}{V_e} = K \frac{1}{1 + j\frac{2m}{\omega_n}\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$	$\frac{V_s}{V_e} = K \frac{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}{1 + j\frac{2m}{\omega_n}\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$	$\frac{V_s}{V_e} = K \frac{j\frac{2m}{\omega_n}\omega}{1 + j\frac{2m}{\omega_n}\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$
$Y_1 = 1/R$ $Y_2 = jc_2\omega$ $Y_3 = 1/R$ $Y_4 = 1/R$ $Y_5 = jc_1\omega$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>K = -1</math>  <math>\omega_n = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}</math>  <math>m = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}</math> </div>	$Y_1 = jc\omega$ $Y_2 = 1/R_2$ $Y_3 = jc\omega$ $Y_4 = jc\omega$ $Y_5 = 1/R_1$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>K = -1</math>  <math>\omega_n = \frac{1}{C\sqrt{R_1R_2}}</math>  <math>m = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}</math> </div>	$Y_1 = 1/R_1$ $Y_2 = 1/R_2$ $Y_3 = jc\omega$ $Y_4 = jc\omega$ $Y_5 = 1/R_3$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>K = -\frac{R_3}{2R_1}</math>  <math>\omega_n = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2R_3}}</math>  <math>m = \sqrt{\frac{R_1R_2}{R_3(R_1 + R_2)}}</math> </div>

2.2- **Structure de Sallen et Key :**

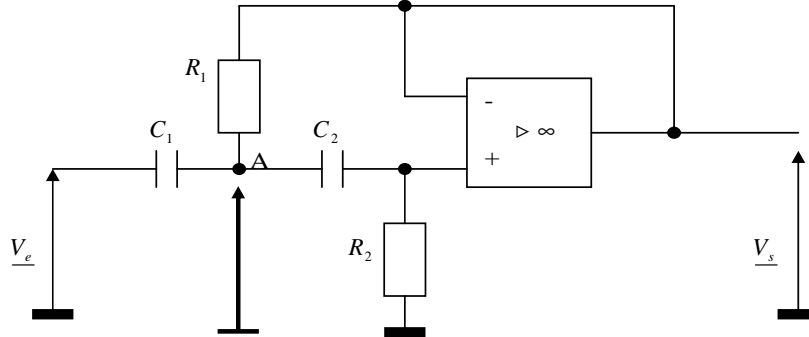
2.2.1- **Structure à gain fixe :**

a- **Filtre passe-bas à gain fixe :**



$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{1 + j2RC_2\omega + C_1C_2(jR\omega)^2}; \underline{T}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}; \text{où: } \omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}} \text{ et } m = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$$

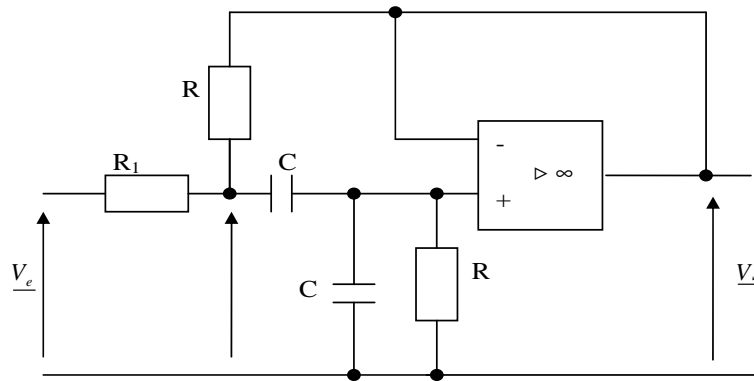
**b- Filtre passe-haut à gain fixe :**



$$\underline{T}(j\omega) = \frac{R_1R_2C_1C_2(j\omega)^2}{1 + jR_1(C_1 + C_2)\omega + R_1R_2C_1C_2(j\omega)^2}$$

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \text{où: } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}} \text{ et } m = \frac{R_1(C_1 + C_2)}{2\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$$

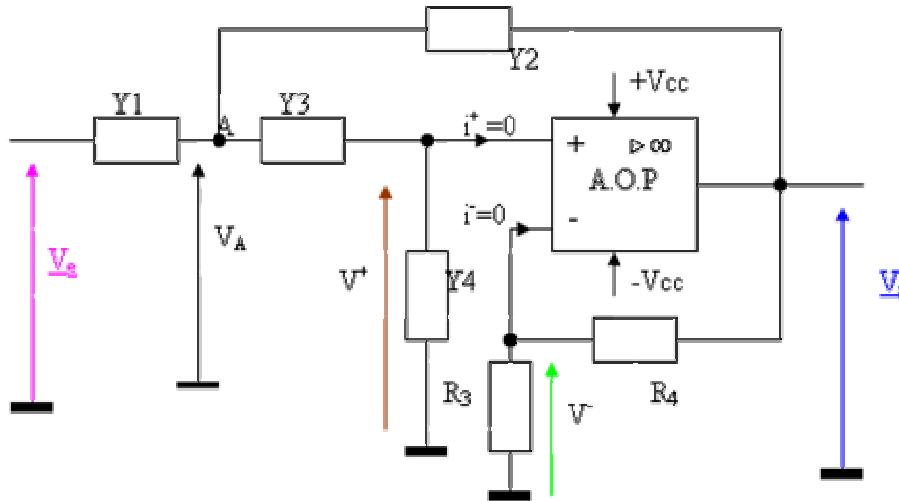
**c- Filtre passe-bande à gain fixe :**



$$\underline{T}(j\omega) = \frac{jR^2C(\omega)^2}{R + R_1 + j2R(R + R_1)C\omega + R_1(jRC\omega)^2}$$

$$\underline{T}(j\omega) = A \cdot \frac{2mj\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \text{ où: } A = \frac{R}{2(R + R_1)}; \omega_0 = \frac{1}{RC} \sqrt{1 + \frac{R}{R_1}} \text{ et } m = \sqrt{1 + \frac{R}{R_1}}$$

**2.2.2- Structure à gain variable :**



<p>Filtre Passe-bas <math>g_0 = \frac{R_3 + R_4}{R_3} &lt; 1 + 2 \frac{C_1}{C_2}</math></p>	<p>Filtre Passe-haut <math>g_0 = \frac{R_3 + R_4}{R_3} &lt; 1 + 2 \frac{R_1}{R_2}</math></p>
<p><math>\frac{V_2}{V_1} = \frac{g_0}{1 + jR(2C_1 + C_2(1 - g_0))\omega + C_1C_2(jR\omega)^2}</math>                  où : <math>g_0 = \frac{R_3 + R_4}{R_3}</math></p>	<p><math>\frac{V_2}{V_1} = \frac{g_0R_1R_2(jC\omega)^2}{1 + j(2R_1 + R_2(1 - g_0))C\omega + R_1R_2(jC\omega)^2}</math>                  où : <math>g_0 = \frac{R_3 + R_4}{R_3}</math></p>
<p>de la forme : <math>\frac{V_s}{V_e} = K \frac{1}{1 + j \frac{2m}{\omega_n} \omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}</math></p>	<p><math>\frac{V_s}{V_e} = A \frac{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}</math>; où : <math>p = j\omega</math></p>
<p><math>Y_1 = 1/R</math>  <math>Y_2 = jc_2\omega</math>  <math>Y_3 = 1/R</math>  <math>Y_4 = jc_1\omega</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <p><math>K = g_0; \omega_n = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}</math>  <math>m = \frac{1}{\sqrt{C_1C_2}} [2C_1 + (1 - g_0)C_2]</math></p> </div>	<p><math>Y_1 = jc\omega</math>  <math>Y_2 = 1/R_1</math>  <math>Y_3 = jc\omega</math>  <math>Y_4 = 1/R_2</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <p><math>A = g_0</math>  <math>\omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_1R_2}}</math>  <math>m = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2}} \left[ R_1 + (1 - g_0) \frac{R_2}{2} \right]</math></p> </div>